Αριθμητική Ανάλυση No. 1 Date 09/12/2019

Πολυωνυμική Παρεμβολή:

Παρεμβολή είναι ειδική περίπτωση της θεωρίας προσέγγισης

Δοθέντων σημείων $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots,n$, να βρεθεί συνάρτηση

φ: που θα περνά κοντά από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots,n$

Η φ: συνήθως είναι απλή συνάρτηση που μελετάται εύκολα.

πολυωνυμική, τμηματική πολυωνυμική, πηλίκο πολυωνύμων, τριγωνομετρική, εκθετική.

- Στην παρεμβολή θέλουμε συνάρτηση φ, να περνάει από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,2,\dots,n$

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i=0,1,2,\dots,n.$$

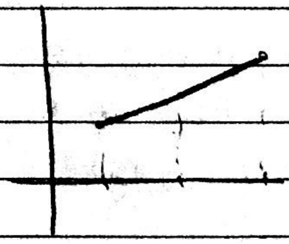
Πολυωνυμική Παρεμβολή:

Να βρεθεί πολυώνυμο το πολύ n βαθμού που θα περνάει από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i=0,1,\dots,n$

$$P_n \in \mathbb{P}_n, \quad \mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset \dots \subset \mathbb{P}_n$$

→ Θα επικεντρωθούμε μόνο στην πολ. παρεμβολή τύπου Lagrange

Δοθέντων $n+1$ σημείων $x_0, x_1, \dots, x_n$, διαφορετικών μεταξύ τους και οι τιμές της f, $f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$ να βρεθεί πολυώνυμο $P_n \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,2,\dots,n$.



Απόδειξη: Ύπαρξης και μοναδικότητας:

Έστω $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ τότε η σχέση $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$, δίνει ένα γραμμ. σύστημα:

$$a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2 + \dots + x_0^n a_2 = f(x_0)$$
$$a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \dots + x_1^n a_n = f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$a_0 + x_n a_1 + x_n^2 a_2 + \dots + x_n^n a_n = f(x_n)$$

Η ορίζουσα συντελεστών αγνώστων είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

είναι ορίζουσα Vandermonde, είναι διάφορη του μηδενός επειδή τα x_i είναι διαφορετικά.

Θεωρώ το πολυώνυμο $q_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ τέτοιο ώστε $q_{n+1}(x) = P_n(x) + a\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, $a \neq 0$

$$q_{n+1}(x_i) = P_n(x_i) + a\prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j) = f(x_i)$$

$r(x)$

→ Να βρεθεί το γραμμικό πολυώνυμο $P_1(x)$ που παρεμβάλλει τα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

$$P_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

• Αν $f \in \mathbb{P}_n$, ποιο θα είναι το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n \in \mathbb{P}_n$;
Το $P_n \equiv f$

Θεώρημα Weierstrass:
Δεδομένων $f \in C[a,b]$ κ' $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο P τέτοιο ώστε $\max_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| \le \varepsilon$.

Έστω $f \in C^{n+1}[a,b]$ και τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε για το πολυώνυμο $P_n \in \mathbb{P}_n$ που παρεμβ. την f στα σημεία αυτά, ισχύει:

$$\forall x \in [a,b] : \exists \xi \in (a,b) : f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \quad (*)$$ και

$$\|f - P_n\|_\infty \le \max_{a \le x \le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right| \cdot \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}, \text{ όπου } \|g\|_\infty = \max_{a \le x \le b}|g(x)|.$$

<u>Απόδειξη:</u> Η (*) ισχύει για $x = x_i$ $(0=0)$. Υποθέτω $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $i=0,1,\dots n$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ τέτοια ώστε

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\Phi(x)} \Phi(t), \quad \text{όπου} \quad \Phi(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Προφανώς $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$.

<u>Παρατηρούμε:</u> Ότι $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0,1,\dots n$

επίσης $\varphi(x) = f(x) - P_n(x) - \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\Phi(x)} \Phi(x) = 0.$

Η φ έχει $n+2$ διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες στο $[a,b]$

Από το θεώρημα του Rolle έπεται ότι η f' θα έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες στο (a,b) και επαγωγικά η $F^{(n+1)}$ θα έχει τουλ. μια ρίζα στο (a,b) έστω την $\xi \in (a,b)$.

Παραγωγίζουμε την φ $n+1$ φορές

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi^{(n+1)}(t)$$

$$= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\Phi(x)} (n+1)!$$

$\Phi(t) = t^{n+1} + q_n(t)$

$\Phi^{(n+1)}(t) = (t^{n+1})^{(n+1)} = (n+1)!$

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\Phi(x)} (n+1)! \iff f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{\Phi(x)}{(n+1)!}$$

Αν $f \in \mathbb{P}_n$ αποδεικνύεται από την (*) ότι $f(x) - P_n(x) = 0$ $\forall x \in [a,b] \iff f \equiv P_n$